ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

На правах рукописи

КАВАЛОВ АЛЕКСАНДР РУБЕНОВИЧ

УДК 530.145

# СТРУННАЯ СТРУКТУРА ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

ЕРЕВАН-1986

Работа выполнена в Ереванском физическом институте

Научные руководители: доктор физико-математических наук, член-корреспондент АН АрмССР С.Г.МАТИНЯН, кандидат физико-математических наук А.Г.СЕДРАКЯН

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук А.А.МИГДАЛ (Научный совет по комплексной проблеме "Кибернетика" АН СССР), доктор физико-математических наук А.А.БЕЛАВИН (ИТФ им.Ландау).

Ведущая организация: Математический институт Академии наук СССР имени Стеклова, г. Москва.

Защита состоится "28" апреля 1987 года в $14^{00}$ часов на заседании специализированного совета Д 034.03.0I при Ереванском физическом институте (г. Ереван-36, ул.Маргаряна, д. № 2).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского физического института.

Автореферат разослан "19" марта 1987 года.

Ученый секретарь
специализированного совета
кандидат физ.-мат. наук В.А.Шахбазян

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

<u>Актуальность темы</u>. Всестороннее изучение струнных теорий является сейчас одной из основных задач теории элементарных частиц. Это связано с тем, что струнные модели могут, по современным представлениям, позволить решить как минимум две фундаментальные проблемы: проблему построения теории сильных взаимодействий и проблему построения моделей, объединяющих все известные взаимодействия природы. В связи с первой из этих проблем актуальным является изучение струнной структуры, возникающей, как показывают многочисленные исследования, в калибровочных моделях (в частности, в квантовой хромодинамике). Простейшей нетривиальной калибровочной теорией является трехмерная калибровочная модель Изинга на кубической решетке, изучению которой посвящена в основном настоящая диссертация.

Трехмерная калибровочная модель Изинга связана преобразованием дуальности с трехмерной моделью Изинга. Эта связь позволяет переводить всякую информацию, полученную для исходной модели, на язык дуальной. Обе эти модели принадлежат обширному семейству статфизических решеточных моделей. Изучение фазовых переходов в таких системах важно и актуально и в связи с рядом задач макроскопической физики (физики кристаллов, конденсированных сред, сверхтекучести и сверхпроводимости, сплавов). В настоящее время получен ряд точных результатов в теории фазовых переходов в двумерных системах. В частности, осознана тесная связь проблемы фазового перехода в двумерных системах с проблемой точной интегрируемости теорий поля. На очереди изучение трехмерных систем. В этой связи также является актуальным изучение трехмерных систем. В этой связи также является актуальным изучение трехмерной калибровочной модели Изинга. В диссертации предложено представление этой модели в виде решеточной теории фермионной струны, действие которой содержит фермионные поля не более чем квадратично, что отличает эту модель от предложенных ранее.

В построении фермионной модели, эквивалентной трехмерной модели Изинга, важную роль играет так называемый знаковый фактор, сопоставляемый параметризованным поверхностям, дающим вклад в статсумму. В диссертации описана его конструкция (являющаяся обобщением конструкции Полякова и Доценко) и изучены свойства (локальная Лоренц-инвариантность и мультипликативность), наличие которых обеспечивает существование у действия модели наивного непрерывного предела.

Отметим, что в наивном непрерывном пределе действие полученной в главе II диссертации решеточной модели фермионов на поверхностях, эквивалентной трехмерной модели Изинга, определяется индуцированным на мировой поверхности струны действием Дирака. Последнее входит как слагаемое в действия теорий суперструн и теории гетеротической струны, претендующих в настоящее время на единое описание всех взаимодействий и обладающих рядом уникальных свойств, обнаружение которых вызвало в последнее время бурный всплеск интереса к струнным теориям. Изучение индуцированного действия Дирака, проведенное в диссертации, представляется поэтому весьма актуальным и в связи с проблемой построения единых теорий - в частности, в связи с проблемой компактификации теорий суперструн и гетеротической струны. В этой же связи актуально и изучение теории суперструны с $N$ = I глобальной суперсимметрией, которому посвящен § I главы Ш диссертации.

Целью работы является изучение струнной структуры, возникающей в трехмерной калибровочной модели Изинга, изучение классического непрерывного предела возникающей решеточной фермионной модели, изучение некоторых аспектов теории суперструны с $N$ = I глобальной суперсимметрией.

Научная новизна работы. В диссертации получены следующие результаты. Предложена и изучена конструкция знакового фактора, обеспечивающего сокращение самопересекающихся поверхностей в статсумме трехмерной калибровочной модели Изинга, допускающая переформулировку трехмерной калибровочной модели Изинга в виде решеточной теории фермионов на поверхностях, содержащей фермионные поля в действии не более чем квадратично и допускающей переход к классическому непрерывному пределу, и восстановление в этом пределе репараметризационной инвариантности; построена обладающая указанными свойствами решеточная модель фермионов, эквивалентная трехмерной модели Изинга. Изучен классический непрерывный предел этой модели и



показано, что в классическом непрерывном пределе трехмерная модель Изинга эквивалентна теории фермионной струны с действием, равным сумме действия Намбу и индуцированного на мировой поверхности действия Дирака.

Показано, что свободная энергия суперструны с $N$ = I глобальной суперсимметрией в трехмерном пространстве содержит бозонную и фермионную части, причем последняя совпадает со свободной энергией трехмерной модели Изинга вблизи критической точки.

Показано, что теория $N$ = I суперструны с членом Весса-Зумино обладает одновременно с локальной суперсимметрией свойством самодуальности. Вычислена часть эффективного действия суперструны с $N$ = I глобальной суперсимметрией, определяемая конформной аномалией, и показано, что эффективное действие зависит не только от внутренней кривизны мировой поверхности, но и от внешней кривизны (т.е. от второй квадратичной формы поверхности).

Вычислен детерминант оператора Дирака, индуцированного на регулярной двумерной поверхности в трехмерном пространстве. Показано, что в случае киральных фермионов (киральные проекторы определяются локально в каждой точке поверхности) эффективное действие определяется конформной аномалией, приводящей к возникновению действия Лиувилля, и аномалией локальной Лоренц-симметрии, порождающей член Весса-Зумино, определяемый плотностью топологического инварианта Хопфа отображения $S^3 \to S^2$. Для дираковских фермионов аномалия локальной Лоренц-симметрии отсутствует и эффективное действие совпадает с действием Лиувилля.

Практическая ценность. Результаты диссертации могут быть использованы:

а) для изучения калибровочных теорий в терминах струнных переменных, в том числе для построения струнных теорий сильного взаимодействия;

б) для изучения ряда вопросов макроскопической физики, связанных с проблемой фазового перехода в трехмерных системах;

в) для дальнейшего изучения суперструнных моделей объединения всех взаимодействий;

г) для изучения некоторых математических вопросов, возникающих в связи с проблемой топологической классификации отображений двумерных многообразий в трехмерные.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах ряда институтов (ЕрФИ, ИТФ им.Л.Д.Ландау АН СССР, МИАН СССР им. Стеклова, ИЯИЯЭ БАН (Болгария), ЦЕРН (Швейцария)), а также представлялись на Международную конференцию по физике высоких энергий в Брайтоне (Великобритания, 1983 г.) и на Советско-американское рабочее совещание по калибровочным теориям поля в Ереване (СССР, 1983 г.).

Публикации. По результатам диссертации опубликовано шесть работ.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 171 наименования. Она содержит 100 страниц машинописного текста и 11 рисунков.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обсуждается значение рассмотренных в диссертации вопросов и дается краткий обзор содержания диссертации.

В первой главе предлагается и исследуется конструкция знакового фактора, возникающего в процессе переформулировки трехмерной модели Изинга в виде теории параметризованных двумерных поверхностей на трехмерной решетке. Числовое значение знакового фактора хорошо известно:

$$\Phi[\vec{x}] = (-1)^{n} \qquad (1)$$

где $n$ - число ребер, по которым происходит самопересечение поверхности. В § 1 излагаются основные элементы конструкции аналогичного фактора двумерной модели Изинга - фактора Каца-Уорда, имеющие аналоги в трехмерном случае. В § 2 приводится и обосновывается известное выражение для одного из двух основных элементов конструкции знакового фактора поверхности (1): знакового фактора $\Phi(c)$, сопоставляемого контурам на поверхности и равного:

$$\Phi(c) = (-1)^{n_c} \qquad (2)$$



где $n_{c}$ - количество оборотов контура $c$ вокруг конца линии самопересечения поверхности. В § 3 предлагается решеточное выражение для функционала $\Phi(c)$, удобное для использования в случае контуров на решеточной поверхности, исследуются свойства фактора $\Phi(c)$ и описывается второй основной элемент конструкции знакового фактора (1) - набор несамопересекающихся контуров на решеточной поверхности, пересекающих по разу каждое ребро поверхности; беря произведение по такому набору факторов $\Phi(c)$ (2), получим, очевидно, искомый фактор $\Phi[\vec{x}]$ (1). Доказывается, что предложенное выражение для функционала $\Phi(c)$ обладает свойствами инвариантности ($\Phi(c)$ остается неизменным при гладких деформациях контура $c$, не пересекающих сингулярных точек - концов линий самопересечения поверхности, и меняет знак при пересечении такой точки; $\Phi(c)$ остается неизменным при осуществлении малых вращений касательного базиса, связанного с контуром) и мультипликативности (для контуров $c_1$ и $c_2$, имеющих "сокращающийся" общий участок и образующих вместе контур $c_3$, верно равенство $\Phi(c_1)\Phi(c_2)=\Phi(c_3)$). Эти свойства вместе с симметричностью выбранного набора контуров (он обладает локальной симметрией относительно поворотов вокруг нормали к поверхности) позволяют построить в главе II решеточную модель фермионной струны, эквивалентную трехмерной модели Изинга.

Во второй главе описывается фермионное представление трехмерной модели Изинга. В § 1 исследована в качестве приближения к трехмерной модели Изинга двумерная модель Изинга и установлена связь между нею и теорией суперчастицы в двумерном пространстве. Показано, что свободная энергия суперчастицы в двумерном пространстве равна сумме свободных энергий бозона и фермиона, причем последняя совпадает со свободной энергией двумерной модели Изинга вблизи критической точки. Этот результат вполне естественен, поскольку известно, что суперчастица в двумерном пространстве действительно описывает бозон и фермион, а также, что возбуждения двумерной модели Изинга вблизи критической точки носят фермионный характер.

В § 2 главы II построена решеточная модель фермионов на поверхностях, эквивалентная трехмерной модели Изинга. Статсумма модели дается выражением:

$$Z = \sum_{\{\vec{x}(\xi)\}} \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \; e^{S_1 + S_2} \qquad (3)$$

где суммирование производится по всем замкнутым параметризованным двумерным поверхностям на трехмерной решетке. На каждой поверхности определено фермионное поле $\psi$, по которому производится функциональное интегрирование. Первое слагаемое в действии имеет вид:

$$S_1 = A/\varepsilon^2 \qquad (4)$$

где $A/\varepsilon^2$ – площадь поверхности в единицах шага решетки. Рассмотрим второе слагаемое. Оно задается выражением:

$$S_2 = i \sum_{\xi} \sum_{a=1}^{2} \bar{\psi}_{L,R}(\xi)\gamma_\alpha(\xi) \tau_a^\alpha(\xi)\Omega(\xi, \xi+\tau_a(\xi))\psi_{R,L}(\xi+\tau_a(\xi)) \qquad (5)$$

где $\psi_{L,R}$ – киральные фермионные поля (киральность определена локально с помощью проекторов $P_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \pm n(\xi))$, где $n = n^\mu \gamma_\mu$ ($\mu$ = I,2,3) и $n^\mu(\xi)$ – вектор нормали к поверхности в точке $\xi$; $\gamma_\mu$ – матрицы Дирака трехмерного пространства. Фермионы определены на поверхности "в шахматном порядке": левые – в четных точках, правые – в нечетных; четность и нечетность точек определяется в произвольно выбранной системе координат на развертке поверхности. При этом на границе развертки заданы специальным образом выбранные граничные условия, обеспечивающие согласованность полей в случае, если на границе отождествляются точки с противоположными четностями. Входящие в выражение (5) матрицы $\gamma_\alpha$ ($\alpha$ = I,2) – локальные $\gamma$ – матрицы поверхности:

$$\gamma_\alpha(\xi) = x_\alpha^\mu(\xi)\gamma_\mu \qquad (6)$$

где $x_\alpha^\mu$ – касательные векторы поверхности, $\gamma_\mu$ – матрицы Дирака трехмерного пространства. Оператор $\Omega(\xi, \xi+\tau_a)$ – специальным образом выбранный оператор вращения. Следует особо сказать о входящих в выражение (5) векторах $\tau_a^\alpha(\xi)$ ($\alpha$ =I,2). Они определяют структуру действия модели: (фермион, находящий-



ся в точке $\xi^\alpha$, взаимодействует со своими соседями, находящимися в точках $\xi^\alpha + \tau_a^\alpha$) и подобраны таким образом, чтобы интегрирование по фермионным полям порождало систему контуров на поверхности, описанную в главе I. При этом, как показано в § 2 главы II, статсумма (3) совпадает, после интегрирования по фермионным полям, со статсуммой трехмерной калибровочной модели Изинга.

В § 3 главы II показано, что описанная модель допускает переход к пределу нулевого шага решетки. В этом пределе первое слагаемое в действии, $S_1$, сводится к действию Намбу, а второе слагаемое принимает (после переопределения фермионных полей) вид:

$$S_2 = i\int d^2\xi \sqrt{g}\, \bar{\psi}(\xi) g^{\alpha\beta}(\xi)\gamma_\alpha(\partial_\beta + \Gamma_\beta(\xi))\psi(\xi) \qquad (7)$$

где

$$g_{\alpha\beta}(\xi) = \partial_\alpha x^\mu(\xi)\,\partial_\beta x_\mu(\xi) \qquad (8)$$

– индуцированная метрика поверхности,

$$\Gamma_\alpha = \frac{1}{4}(\gamma_\beta \nabla_\alpha \gamma^\beta + n\,\partial_\alpha n) \qquad (9)$$

– индуцированная спинорная связность (ковариантная производная $\nabla_\alpha$ определена с помощью метрики $g_{\alpha\beta}$). Действие (7) является индуцированным на мировой поверхности $\vec{x}(\xi^1, \xi^2)$ действием Дирака.

В § 4 главы II показано, что результат, аналогичный полученному в § I, имеет место и в случае струн: свободная энергия суперструны с N = I глобальной суперсимметрией равна сумме свободных энергий бозонной и фермионной струны, совпадающей со свободной энергией трехмерной модели Изинга вблизи критической точки. Для этого вычислен (с использованием удобной дискретизации и конформной параметризации поверхности) функциональный интеграл по Ферми-полям в выражении для свободной энергии и показано, что вклад квадратичных по фермионам членов совпадает со знаковым фактором (I). Этот результат находится в согласии с результатом § 3 главы II: квадратичная часть действия $N$ = I суперструны совпадает с индуцированным на мировой поверхности действием Дирака.

<u>В § I главы Ш</u> диссертации рассмотрены некоторые вопросы теории $N$ = I суперструны. Действие этой теории отличается от действия локально суперсимметричной суперструны Грина и Шварца отсутствием члена Весса-Зумино. Мы показываем, что локальная суперсимметрия позволяет (по крайней мере на классическом уровне) зафиксировать в теории суперструны Грина-Шварца калибровку, при которой ее действие переходит в действие $N$ = I суперструны. Приводится преобразование дуальности, позволяющее записать действие теории $N$ = I суперструны в виде:

$$S=\int d^2\xi\sqrt{g}\,\{\partial_\alpha x^\mu\partial_\beta x_\mu g^{\alpha\beta}+i\partial_\alpha x^\mu\bar\theta\gamma_\mu\partial_\beta\theta\,\frac{\varepsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{g}}\} \qquad (10)$$

содержащем фермионные поля лишь квадратично. Содержащая фермионные поля часть действия (I0) совпадает с $N$ = I членом Весса-Зумино. Показано, что при добавлении к действию $N$ = I суперструны члена Весса-Зумино с произвольным коэффициентом получается действие, самодуальное при значении коэффициента при члене Весса-Зумино, равном I. Такое же значение коэффициента при члене Весса-Зумино выделено условием наличия у действия локальной суперсимметрии. Проведено вычисление конформно-инвариантной части эффективного действия теории (I0). Определен общий вид эффективного действия, из которого, в частности, видно, что эффективное действие должно содержать члены, зависящие не только от внутренней, но и внешней кривизны мировой поверхности.

В § 2 главы Ш проводится в качестве следующего этапа исследования непрерывного предела трехмерной модели Изинга вычисление эффективного действия теории, задаваемой индуцированным на регулярной двумерной поверхности в трехмерном пространстве действием Дирака (7). Действие (7) переписывается в виде:

$$S=i\int d^2\xi\sqrt{g}\,\bar\psi\Omega^{-1}\sigma_a e^{a\alpha}(\partial_\alpha-\frac{i}{2}\sigma_3\omega_\alpha)\Omega\,\psi \qquad (11)$$



где $e^\alpha_a$ - тетрады, удовлетворяющие условию $e_{a\alpha}e^a_\beta=g_{\alpha\beta}$; $\omega_\alpha$ - стандартная спинорная связность, а оператор $\Omega$ осуществляет локальные вращения, приводящие $\gamma$- матрицы $\gamma_a(\xi)=\gamma_\alpha(\xi)e^\alpha_a(\xi)$ к некоторому фиксированному набору $\gamma$ - матриц:

$$\gamma_a=\Omega^{-1}\sigma_a\,\Omega. \qquad (12)$$

Выражение (II) показывает, что индуцированный оператор Дирака совпадает с точностью до локальных вращений $\Omega$ с обычным оператором Дирака фермионов в гравитационном поле. В диссертации вычислен детерминант входящего в (II) оператора для случая киральных фермионов. Он определяется конформной аномалией (приводящей к появлению в эффективном действии действия Лиувилля) и аномалией локальной Лоренц-симметрии действия (II), порождающей в эффективном действии член Весса-Зумино, определяемый плотностью топологического инварианта Хопфа отображения $S^3\to S^2$. В случае дираковских фермионов последняя аномалия отсутствует, и эффективное действие определяется только действием Лиувилля.

<u>В заключении</u> перечислены основные результаты диссертации.

<u>На защиту выносятся</u> следующие основные результаты, полученные в диссертации.

I. Предложена и изучена конструкция знакового фактора, обеспечивающего сокращение самопересекающихся поверхностей в статсумме трехмерной модели Изинга.

2. Построена решеточная модель фермионов на поверхностях, эквивалентная трехмерной модели Изинга, содержащая фермионные поля в действии не более чем квадратично, допускающая переход к непрерывному пределу и восстановление в этом пределе репараметризационной инвариантности.

3. Показано, что в классическом непрерывном пределе трехмерная модель Изинга эквивалентна теории фермионной струны с действием, равным сумме действия Намбу и индуцированного на мировой поверхности действия Дирака.

4. Показано, что свободная энергия суперструны с $N$ = I глобальной суперсимметрией в трехмерном пространстве равна сумме свободных энергий бозонной и фермионной струн, причем

последняя совпадает со свободной энергией трехмерной модели Изинга вблизи критической точки.

5. Показано, что теория $N$ = I суперструны с членом Весса-Зумино обладает одновременно с локальной суперсимметрией свойством самодуальности. Вычислена часть эффективного действия $N$ = I суперструны, определяемая конформной аномалией, и показано, что эффективное действие зависит не только от внутренней, но и от внешней кривизны мировой поверхности.

6. Вычислен детерминант оператора Дирака киральных и дираковских фермионов, индуцированный на двумерной регулярной поверхности в трехмерном пространстве. Показано, что в случае киральных фермионов эффективное действие равно сумме действия Лиувилля и действия Весса-Зумино, определяемого плотностью топологического инварианта Хопфа отображения $S^3 \to S^2$. В случае дираковских фермионов эффективное действие совпадает с действием Лиувилля.

## Результаты диссертации опубликованы в работах:


1. Kavalov A.R., Sedrakyan A.G. Two-dimensional Ising model and quantum superparticle. Preprint EPI-654(44)-83, Yerevan 1983.
2. Kavalov A.R., Sedrakyan A.G. Sign factor of three-dimensional Ising model and the quantum superstring. Preprint EPI-695(10)-84, Yerevan, 1984.
3. Kavalov A.R., Sedrakyan A.G. Sign factor of three-dimensional Ising model and quantum fermionic string. Phys.Lett. 1986, vol.173B, p.449.
4. Kavalov A.R., Sedrakyan A.G. Quantum geometry of covariant superstring with N=1 global supersymmetry. Preprint EPI-815(42)-85, Yerevan, 1985.
5. Kavalov A.R., Kostov I.K., Sedrakyan A.G. Dirac and Weyl fermion dynamics on two-dimensional surface. Phys.Lett, 1986, vol.175, p.331
6. Kavalov A.R., Sedrakyan A.G. On the three-dimensional Ising model. Preprint EPI-936(87)-86, Yerevan, 1986.





Технический редактор А.С.Абрамян

Подписано в печать 05.02.87 г. ВФ - 02I53 Формат 60x84/I6
Офсетная печать. Уч.изд.л.I,0 Тираж I70 экз.
Зак.тип.№ 078 Индекс 3624

Отпечатано в Ереванском физическом институте
Ереван 36, Маркаряна 2